

徐昇多邊形網法之數值計算

Numerical Algorithm of Thiessen Polygons Method

鄭子璉

Tze-Lien Tseng

成功大學水利及海洋工程學系

研究助理

周乃昉

Frederick N.F. Chou

成功大學水利及海洋工程學系

副教授

摘要

估算集水區平均降雨量常採用的徐昇多邊形網法具有通用性質且精度佳，但因計算過程繁雜，人工分析不易，造成相關研究或分析上的不便。

本研究發展電子計算機徐昇多邊形網法的數值計算模式，可迅速求得雨量站之三角網、徐昇多邊形網，並利用自行發展交集分析計算模式，求出各雨量測站在集水區內的控制面積加權因子，有助於規劃階段與現場即時估計平均降雨量。

研究中採用幾何分析，數值計算過程中可維持資料原始數化精度，研究成果在數值計算速度及精確度上均較部分套裝軟體為優。

關鍵字：徐昇多邊形網法、三角網、平均雨量、集水區。

Abstract

Thiessen's polygon method, which is used for estimating the areal rainfall of watershed, is capable of good accuracy and rapidity. However, due to the complexity of calculation, the Thiessen's polygon method is difficult to be carried out in routine operation.

In present study, an algorithm for Thiessen's polygon method is developed. The triangulated irregular networks (TIN) and Thiessen's polygons can be gained according by. With the self-developed intersection analysis model, the weighted factors of real-time average rainfall could be estimated automatically and efficiently.

In the algorithm, geometry analysis is applied, so as to maintain the accuracy of original digitization. From the results of tests, it is found that the numerical model performs better a commercial software packages in the viewpoint of analysis speed and accuracy. It is recommended to use present model instead of other commercial software packages in the analysis stage.

Key word: Thiessen's polygon method, triangulated irregular networks, areal rainfall, watershed.

一、前言

1.1 研究背景

集水區面積雨量估算有許多種方法，一般常用方法有算數平均法、徐昇多邊形法、高度平衡多邊形法、等雨量線法等，在多數相關研究中，經常採用具有通用性質且精度佳的徐昇多邊形法，以進行分析計算並得到較佳的集水區面積雨量，特別是在即時防洪運轉時，以事先分析完成之徐昇加權因子方能應付即時分析所需的時效，惟徐昇多邊形法使用上較複雜，造成相關研究或分析上的不便。

徐昇多邊形網法 (Thiessen's Polygon Method) 是估計區域平均降雨量所最常用的方法，但由於過去徐昇多邊形多以人工繪製，須耗費相當的時間及人力，而完成的徐昇多邊形也可能因測站移動、增設或裁撤必須重新繪製。尤其在洪水即時預報系統中，若遙測雨量站故障則需立即重新繪製，否則無法正確估算平均降雨量，影響即時模式預報洪水量之正確性。若事前欲以人為方式準備包含各種不同可能雨量站組合的徐昇多邊形網加權因子表，以滿足即時預報系統在時效上的要求，有可能因組合數量太多而不實際。

現有經常運用的地理資訊系統中，可透過額外購買的分析模組進行徐昇多邊形網法的分析，但其分析方法受精度或計算方法限制，導致計算結果不佳，例如採用 ArcView 軟體搭配 Spatial Analyst 分析，計算約需 1~4 小時方能完成，且計算結果隨格網設定狀況而成階梯邊界，若採用 MicroStation 軟體，則受限其系統最小解析度限制，使得端點必須在格點上，無法快速精確分析。

1.2 研究目的

在本研究中以電子計算機建立完整徐昇多邊形法數值分析模式並探討相關應用理論，可迅速完成高度平衡多邊形網的繪製與計算，計算出每一個雨量測站的徐昇加權因子，並減少人工作業時間，有助於現場估計即時平均降雨量的計算應用，應用在即時防洪運轉系統中，當遙測雨量站故障時，也可迅速分析得到新的徐昇多邊形及徐昇加權因子來估算區域平均降雨量，有助於防洪運轉系統的計算應用。研究中以 Visual Basic 為發展工具，建立具有立即展示計算結果的數值模式，並直接求得各雨量站的徐昇加權因子，減少現有地理資訊系統軟體另需徐昇多邊形網與流域多邊形的交集分析操作。

二、研究方法

雨量站在空間的分佈位置並不均勻，徐昇多邊形網以經由決定各雨量站之影響控制面積方式，調整估計區域的平均降雨。一座雨量站在集水區內的影響控制面積對全區面積之比例，是為該測站的加權因子，可用以計算集水區的平均降雨量，而各雨量站所控制面積範圍，概念上為該範圍內之任一點，對該雨量站與其他所有之雨量站之距離最短。

徐昇多邊形網法為將所有 N 個相鄰之雨量站兩兩相連，構成多個三角形，再做三角形各邊之垂直平分線，三邊之垂直平分線必交於一點，即三角形之外心。連接各三角形之外心，即可形成 N 個多邊形網，簡稱徐昇多邊形網，以包含該雨量站之徐昇多邊形與流域邊界進行交集分析，可得該雨量站控制流域的面積，求出此面積與流域面積的比例，即為該雨量站之徐昇加權因子。進行平均降雨之計算時，累加各雨量站測得之雨量記錄乘

以各站之徐昇加權因子，即得流域之平均雨量。在前述之分析中，可以將此加權因子之計算程序推求歸納如下：

1. 建構雨量站三角網 (triangulated irregular networks, TIN)
將所有 N 個相鄰之雨量站以直線兩兩相連，構成多個三角形。
2. 依據前項目建立之雨量站三角網，建構徐昇多邊形網
 - (1) 建構此諸雨量站連線之垂直平分線，亦即以三角網做三角形各邊之垂直平分線，三邊之垂直平分線必交於一點，即三角形之外心。
 - (2) 連接各三角形之外心，或以諸垂直平分線交會形成 N 個多邊形，即徐昇多邊形網。
3. 分析各雨量站所控制徐昇多邊形的面積
 - (1) 將徐昇多邊形網與流域邊界進行交集運算，可得到各雨量站所控制徐昇多邊形。
 - (2) 分析求得各雨量站所控制徐昇多邊形的面積。
4. 計算徐昇加權因子
 - (1) 分析求得流域面積。
 - (2) 分析各雨量站所控制徐昇多邊形的面積與流域面積的比值。

以此法計算求出之平均降雨量精確度較佳，亦是最常用的區域平均降雨量計算法，惟其中若有一雨量站變動，整個徐昇多邊形網便須重新繪製為其缺點。

三、數值方法

3.1 資料數位化

運用電子計算機進行數值分析計算前，應先透過數位板或其他方式將流域資料進行數位化，以供電子計算

機分析使用。流域及雨量站經數化處理後，在往後的各項應用中非常方便，如須計算其它組合的徐昇多邊形網時，只須將已數化完畢之圖檔讀入，即可立刻進行分析使用，即使測站有增加、遷移或重新測量座標等情形，只須略加修改圖檔後，即可立刻重新分析。鑑於地理資訊系統日漸普及，欲計算之流域亦可能已有數化完成的圖檔，或僅須對不同系統撰寫資料轉換界面，或經由各地理資訊系統將圖檔轉換成可以讀取之格式存檔，再進行分析，因此僅需考量資料數值分析部分，資料數位化之建立、管理或編修可仰賴現有之軟體達成。

3.2 建立雨量站三角網

徐昇多邊形三角網中，各三角形的形狀影響徐昇法估算加權因子的正確性及精確度，由不同組的三個雨量站所形成的三角形，以每個三角形都接近正三角形最為理想，但三角形受雨量站之分佈位置受地形及雨量站是否故障等情況影響，實難以達此理想。在本研究中三角網之決定，以採用任三個雨量站所決定的外接圓內不包含其它雨量站者，構成一個基本三角形，利用此法可決定出較為理想的三角形，並使三角形的各邊長最短，以此原則逐一分析所有測站組合後，即可得到較佳的雨量站三角網。

3.3 建立徐昇多邊形網

三角網決定後，即可同時定出每個三角形之外心位置。將包含同一雨量站且相鄰的兩個三角形之外心兩兩相連，其所圍成之區域即為該雨量站的控制範圍，亦稱為徐昇多邊形，依此所有相鄰三角形外心的連線便構成一個徐昇多邊形網。

3.4 交集分析演算法

當徐昇多邊形網分析完成後，應分析各雨量站所控制之徐昇多邊型與流域多邊形交集所佔面積，方能計算徐昇加權因子，在兩非凸多邊形進行交集分析時，先以兩多邊形相交的交點座標，將兩多邊形切成多段之多重折線，並逐一判斷兩多邊形所切成多段之多重折線所有座標點是否在另一多邊形內，分別剔除所有未在另一多邊形內的多重折線，所得之所有座標點即為欲求交集多邊形邊界座標，依序逐一串接交集多邊形邊界座標及交點座標，即可得完整之交集多邊形。

3.4.1 空間中任一點與多邊形得關係

在空間中之一任意點可位在多邊形內、在多邊形外及在多邊形上等三種情況，若在多邊形上又可細分成在線段上或在線段端點上。若將點與多邊形畫在同一圖紙上以肉眼判斷，可以很容易看出點與多邊形的關係，但在數學上要判斷如圖 1 所示之「任意點是否在凸多邊形內」，可考慮自該點做任一方向射線求取多邊形與射線的交點數，若為奇數則可得知點在多邊形內；若為偶數（包含 0）則可知點在多邊形外。但此種方法仍有例外情況存在，例如自點 P_a 的射線恰與多邊形相切於某一端點，或射線與多邊形之一邊恰巧重合，或如點 P_c 或點 P_d 恰巧落在多邊形上，因此前述計算方法多僅用在凸多邊形的問題上，而流域多邊形通常為凹多邊形，故此法並不適用。

本研究則採用「多邊形各頂點依序對任意點求取角度差之總合」來判別任意點是否在多邊形內。計算如下式：

$$\Delta\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{y_{(i \bmod n)+1} - y_p}{x_{(i \bmod n)+1} - x_p}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y_i - y_p}{x_i - x_p}\right) \quad (1)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i$$

式中，

θ = 多邊形各頂點依序對任意點求取角度差之總合

n = 多邊形總點數

(x_p, y_p) = 所需判斷之任意點之座標

(x_i, y_i) = 多邊形上第 i 點之座標

$\Delta\theta$ = 第 i 點與第 $i+1$ 點角度差

在式 (1) 中，計算結果可能如式 (2)，

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \pm 2\pi \\ otherwise \end{cases} \quad (2)$$

當 θ 計算結果為 0 時，任意點在多邊形上或多邊形外；當計算結果為 $\pm 2\pi$ 時，任意點在多邊形內；當計算結果為其它值時，任意點在多邊形的端點上。其分析原理可藉由圖 1 來協助說明之。

在圖 1 中，如任意點 P_a 在多邊形外，各邊頂點與點 P_a 的角度差累加為 0，且角度差和變化量由 0 增加再減少，至最後一多邊形頂點與起點之角度差變化量恰巧合為 0，如任意點 P_b 在多邊形內時，各邊頂點與任意點的角度差會沿著多邊形旋轉一圈，故累加為 $\pm 2\pi$ ；如任意點 P_c 落在多邊形的端點上，由於同一點不能做夾角分析，因此最後計算結果會等於任意點前後兩邊的角度差值。

在這其中如任意點 P_d 位在多邊形的線段上時，其角度差和為 0，但在其計算過程中必有一個角度差值為 $\pm\pi$ ，因此當多邊形各頂點依序對任意點求取角度差之總合為 0 時，又可細分為當角度差 $\Delta\theta$ 計算過程中出現

為 $\pm\pi$ 時，任意點在多邊形的線段上；否則任意點在多邊形外。

在式 (2) 中，若計算結果為 $\pm 2\pi$ 時，可以另外獲得多邊形座標點排列順序旋轉方向之資訊，當計算結果為正值時，可以推得多邊形座標點排列順序沿正方向旋轉，即為沿逆時鐘方向旋轉；反之，當計算結果為負值時，可推得多邊形座標點排列順序沿負方向旋轉，即為順時鐘方向旋轉，可分析欲求交集多邊形座標點排列順序之關係，在進行依序逐一串接交集多邊形邊界座標及交點座標時，方不致發生交集多邊形座標連結錯亂，在研究中若計算結果為負值時，令該多邊形先進行反轉後才進行分析，以要求各多邊形均沿正方向旋轉。

3.4.2 兩任意線段交點分析

在進行兩多邊形的交點分析時，兩線段的交點可採解兩直線方程式的二元一次聯立方程式進行計算，若兩直線平行時為無解，若兩直線恰可交於一點時為唯一解，若兩直線重合則為無限多組解；其狀況可運用高斯消去法演算完成的最後一式判定。但若為唯一解時，並不代表兩線段一定有交點，應增加判別交點是否落在兩線段上而非線段外。

欲檢查任意點是否落在線段上可使用兩種方式且都成立：

1. 空間幾何關係

任意點若在線段上，則任意點座標應在線段兩端點座標之間，任意點之座標必不同時大於或小於兩端點座標，其表示式如下式：

$$\begin{cases} P_x \geq L_{x1} \text{ xor } P_x > L_{x2} \\ P_y \geq L_{y1} \text{ xor } P_y > L_{y2} \end{cases} \quad (3)$$

式中，

(P_x, P_y) = 所需判斷之任意點座標

(L_{x1}, L_{y1}) = 線段兩端點之座標

(L_{x2}, L_{y2})

2. 直線方程式

任意點若在線段上，則任意點座標應在線段所形成之直線方程式上，其表示式如下式：

$$\begin{aligned} & -P_x(L_{x2} - L_{x1}) + P_y(L_{y2} - L_{y1}) - \\ & (-L_{x1}(L_{x2} - L_{x1}) + L_{y1}(L_{y2} - L_{y1})) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

本文中兩線段的交點座標已採聯立解兩線段之直線方程式而得，所以交點座標必在兩線段上，因此僅需檢查交點座標與兩線段的空間幾何關係，若交點座標均在兩線段的端點座標內，則兩線段必有交點。

3.4.3 任意多邊形交集分析步驟

由前述交集分析相關理論及方法後，本研究採用之兩任意多邊形的交集分析步驟如下：

1. 檢驗兩多邊形座標點排列順序的旋轉方向，並使兩多邊形座標點排列順序均沿正方向（逆時鐘方向）旋轉。
2. 依序搜尋兩多邊形邊界所有相交之交點座標。
3. 沿兩多邊形各相交點，將兩多邊形從各相交點切成多段多重折線。
4. 檢查各段多重折線是否在另一多邊形內，若不在另一多邊形內則捨去該段多重折線。
5. 由任選一段保留之多重折線開始串接。若被串接之多重折線終點座標與起點座標相同，則此多重折線可形成封閉之多邊形。
6. 重複上步驟 5 直至所有多重折線均被串接一個或多個多邊形為止。

3.5 多邊形面積計算

根據管晏如提出之多邊形面積之計算方法，簡記如 (5) 式：

$$A = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{(i \bmod n)+1} & y_{(i \bmod n)+1} \end{vmatrix} \right\| \quad (5)$$

式中，
 n = 多邊形總點數
 A = 多邊形面積
 (x_i, y_i) = 多邊形上第 i 點之座標

3.6 徐昇加權因子計算

每座雨量站的徐昇加權因子，即以該雨量站的徐昇多邊形在集水區內面積與流域面積的比值：

$$W_i = A_i / A \quad (6)$$

式中，
 W_i = 徐昇加權因子，無因次；
 A_i = 雨量站的徐昇多邊形在集水區內面積；
 A = 集水區總面積。

四、計算實例

本研究以曾文河流域及曾文水庫集水區為計算案例。曾文溪發源於阿里山脈之水山，流經嘉義與台南兩縣，主流全長 138.47 公里，流域面積 1,176 平方公里，為嘉南平原上的最大河川。蒐集曾文河流域附近的雨量站，包含中央氣象局、水利處、南區水資源局所屬的雨量測站計 37 站進行分析。

曾文水庫集水區內外目前共有九個電傳雨量站，包括曾文、水山、樂野、里佳、表湖、馬頭山、龍美、三角南山及大棟山等，配合曾文水庫即時防洪運轉分析中，若發生任一電傳雨量站故障，便應立即依正常作業中之電傳雨量站重新分析徐昇加權因子，以推估平均降雨，為求精確計算水庫集水區內各雨量站所控制之面積，在研究中並運用全球定位系統 (GPS) 將曾文水庫集水區內各雨量站座標校正後進行分析。

實例分析座標採用國際通用之橫麥卡脫投影二度分帶座標系統

(TM2)，以東經 121 度為中央投影線，曾文水庫集水區約在 (197000, 2567000) ~ (233000, 2603000) 之間，座標單位為公尺。

五、結果與討論

5.1 分析結果

圖 2 為研究中開發之數值模式分析完成的螢幕畫面，圖面展示了分析完成之三角網、徐昇多邊形網及與集水區邊界多邊形交集完成的控制區域，以 Pentium II 300 計算此曾文河流域約共需 15 秒，圖 3 為曾文水庫集水區之計算結果輸出向量檔，計算曾文水庫集水區約共需 9 秒，兩計算案例的細部計算時間與計算資料量詳如表 1，同一案例若以 ArcView 3.1 配合額外購買空間分析模組 (Spatial Analyst 1.1) 的 Proximity 及交集分析約需 1 ~ 4 小時，依所設定分析之格網密度而定。

就模式計算之時效性來說，計算速度遠較 Arc 系統為快，約為 Arc 系統計算速度的 500 倍，所運用的編譯器為 Visual Basic 5.0 中文專業版，分析模組可在一般慣用之 32 位元之視窗環境系統上執行 (Win32)。

徐昇多邊形網與流域邊界交集分析採用幾何方式分析，較 ArcView 3.x 以格網分析精確，分析後的多邊形點數僅增加交點座標，不似 ArcView 3.x 以格網分析會產生階梯狀之失真邊界，多邊形端點數並因階梯狀而暴增。

電子計算機因有效位數的限制，導致分析結果亦有些微之誤差，圖 4 為徐昇加權因子輸出表螢幕畫面，圖 4 表格中徐昇多邊形網交集面積欄之單位為平方公尺，在計算曾文河流域中，集水區數化面積換算後約為 1,169.3 平方公里，「其它」列為電子

計算機在計算各雨量站控制面積累加之計算誤差，換算後約為 0.260 平方公釐，在與集水區面積的比值上約為集水區面積的萬兆分之一。在計算曾文水庫集水區中，集水區面積換算後約為 482.6 平方公里，電子計算機在計算各雨量站控制面積累加之計算誤差，換算後約為 0.054 平方公釐，在本研究中的數值方法計算誤差極小，計算誤差可以忽略不計，數值模式之計算精度十分精良。

5.2 研究討論

在研究進行中，利用電腦進行數值計算可大量縮減徐昇多邊形網分析與繪製的時間，但在利用電腦進行分析時，部分電子計算機在發展工具及分析技術上的限制，需先行了解並研究相關問題之癥結，避免實際分析時發生數值計算錯誤。

1. 資料數化技術與誤差

在流域邊界數化一般可分人工數化及自動數化，人工數化可能因流域邊界的線寬或流域邊界本身的精度及端點選點的數量，而導致產生數化誤差，自動數化則受限於演算法及資料本身的精度與解析度而導致產生數化誤差，高精密度的流域邊界數化受限於原始資料，最大可能產生約為千分之五的面積誤差。

在雨量站座標數化來說，多由水文年報或文獻等記載雨量站座標經轉換後點入，亦可由相片基本圖上判讀出來，過去由於文獻上記載雨量站座標精度不足，多有座標為 0 秒的紀錄，部分座標經轉換後應在流域內的雨量站反而位於流域外，誤差極大。在曾文水庫集水區中，電傳雨量站經全球定位系統 (GPS) 校正後，最大相差距離達 2,544 公尺，詳如表 2，全球定位系

統一般可達到 30 公尺以下的精確度，有助於快速檢核雨量站座標是否正確。雨量站座標數化精度對徐昇加權因子計算影響視週遭各雨量站位置而定，在曾文水庫集水區中，最大產生約為十分之一的控制面積誤差。

前述所提之數化誤差遠高於模式計算誤差 11 個值級以上，因此模式之計算誤差均可忽略不計，研究中認為特別應提高雨量站座標數化精度，以提升徐昇加權因子計算精度。

2. 危險圓

在計算處理三角網時，若遇上四個以上的雨量站點共圓之「危險圓」情況，兩個以上的三角形有可能會重疊，產生分析徐昇多邊形網的錯誤，發生機會很小，即使是數學上的共圓情形，也有可能因計算機誤差造成不共圓。

處理方式可以任意頂點為端點，依序連結非相鄰的頂點形成三角網，在徐昇多邊形網的分析部分可知會由各相鄰頂點中點連往危險圓圓心，因此可知只需三角網不發生重疊，則危險圓上的三角網不論如何形成，必定不會影響徐昇多邊形網的分析。

3. 分析範圍邊界

靠近圖面邊緣的雨量站之徐昇多邊形多無法閉合，而外心中垂線將無限延長至無窮遠，因此不但不能計算徐昇多邊形面積，也無法執行交集分析。為解決此種情況，本研究依據人工圖紙作業以有限圖紙分析徐昇多邊形網之方式，由雨量站位置座標點與集水區邊界之資料點中找出最小及最大的 x 值與 y 值，並向圖面外延伸各軸邊長的 5% 做為分析範圍邊界的頂點，憑以繪一矩形視為圖紙邊緣並當做分析範圍邊界。再針對各徐昇多邊形逐一檢查其是否閉合，非閉合的徐昇多

邊形則由中斷處向外延伸至分析範圍邊界，依正方向（逆時針方向）繪成一閉合多邊形；若原為閉合的徐昇多邊形則與分析範圍邊界進行交集分析，以交集完成之徐昇多邊形取代超過分析範圍邊界的徐昇多邊形。附帶的，加入分析範圍邊界亦可使輸出之圖形較美觀，可依圖面內容完全展示在螢幕或圖紙上。

4. 徐昇多邊形網

在針對各種情況分析徐昇多邊形時，可能碰上雨量站數不足以構成三角網，並且無法進行徐昇多邊形網分析，在研究中定義當雨量站數僅有單站時，以分析範圍邊界為該雨量站之徐昇多邊形，當雨量站數為兩站時，以兩雨量站連線之中垂線與分析範圍邊界構成之範圍為該兩雨量站之徐昇多邊形，並以此徐昇多邊形網與流域邊界進行徐昇加權因子計算。

5. 電子計算機有效位數與座標點解析度

在 Visual Basic 中，預設變數資料型態為 Variant 型態，其變數精確度在實數方面可比照倍精度變數，因此可知至少具有 15 位以上的精確度，而在判斷二線段是否重合、相切，或點是否相同時，有時會因受到計算機變數的誤差限制，在數學上或實際上是同一點的情況中，有可能在計算機中會有極小不同的誤差，例如將點座標代入直線方程式時，可能因為點座標或直線方程式之係數為無理數，而無法以有限位數表達，因此本研究中選用相對誤差做判斷標準，並取 10^{-10} 為容許誤差的門檻值，藉此判別是否為同一點或某點是否在目標直線方程式上。

台灣地區二度分帶座標值位數龐大，但實際流域邊界內座標變動位數小，分析計算案例曾文溪流域座標範圍約在 (150000, 2540000) ~

(232000, 2601000) 之間，曾文水庫集水區座標範圍約在 (200000, 2568000) ~ (232000, 2601000) 之間，以 y 方向之座標軸來說，小數點以上即有 7 位數，若採用容許誤差為絕對精度 10^{-10} ，則容許誤差應用於本研究案例，會比計算機可使用 15 位有效位數還小 2 個值級，形成容許誤差完全失效，因此必須改採用容許誤差為相對精度 10^{-10} ，並於計算分析時改採相對座標，將座標值未變動之值級部分進行座標平移，座標平移所採用之基準座標如下式：

$$\left. \begin{aligned} dt &= 10^{\text{int}(\log_{10}(\max(t) - \min(t))) + 1} \\ t &= \text{int}(\min(t) / dt) * dt \end{aligned} \right\}, \quad t = x, y \quad (7)$$

轉換分析計算案例曾文溪流域座標範圍變更為 (50000, 40000) ~ (132000, 101000) 之間，曾文水庫集水區座標範圍變更為 (0, 68000) ~ (32000, 101000) 之間，而在實際對外部進行輸入輸出時才採用絕對座標，提高電子計算機有效位數的運用。

在檢查任意點是否在線段上使用兩種方式均有容許精度的問題，在空間幾何關係分析上，判別兩點是否為同一點時，可能因有效位數的影響，造成同一點可能座標值略有不同，這對串接多重折線成一多邊形時可能造成困擾，在代入直線方程式分析上，可能無法很精準的恰巧等於 0，因此配合採用容許誤差為相對精度 10^{-10} ，使得電子計算機因有效位數對計算所造成的誤差能消除。

以高斯消去法解得之兩線段交點會因兩直線方程式的求取過程而有可能稍有差異，如直線方程式在計算常係數時代入不同的線段端點座標，則有可能發生常係數在有效位數最後 1~2 位數不完全相同的情況，又兩直線方程式在求解的係數

矩陣順序上的不同，亦有可能解出在有效位數最後 1~3 位數略有差異的交點座標，在高斯消去法分析之前可先對輸入之係數矩陣依序排列，以使同一組直線方程式組必解出相同交點座標，另需對所產生之直線方程式係數約分，如此可使兩直線方程式之係數在同一值級上，可避免在消除係數的步驟時，誤差位數過度放大而影響正確的計算。

6. 與現成套裝軟體交集分析比較

圖 5 為套裝軟體 ArcView 軟體交集分析後的部分邊界放大展示，在 ArcView 的交集分析功能中，會在交集邊界上形成階梯狀，在圖中可以很清楚的展現格網方式分析對多邊形的邊界點數增加的影響，在運用 ArcView 進行圖元分析原數化座標點為 688 點之多邊形，經過數次交、聯、差集分析，多邊形已迅速增為 2,203 點，又在 ArcView 中需設定座標解析度，此一設定亦限制其在交集分析上的交點座標必位於格點上，雖然其座標可以以倍精度儲存，但仍無法解析比格網還精確的座標，計算求得之交點座標必會經過適當的進位至格網座標精度方能順利分析，在本研究所發展的數值模式僅增加多邊形交點座標，其餘座標均為原多邊形數化座標，交點座標完全使用倍精度可用的最多位數表示，在分析及應用上座標值失真較小。

六、結論與建議

6.1 結論

1. 以電子計算機進行徐昇加權因子分析可有效提高分析速度與應用層面，分析速度遠超越傳統人工作業速度，估計自數化一集水區多邊形至計算完成約需 15 分鐘，電子計算機分析速度依 CPU 速度可再提昇，目前電子地圖資料非常普遍，

可節省數化集水區多邊形時間，計算效果良好。

2. 自行發展之數值模式可依需求進行調整，在徐昇加權因子計算中，可直接以徐昇多邊形網與流域多邊形進行交集，不需使用者依序操作，在曾文水庫集水區徐昇加權因子計算中，考慮電傳雨量站可能發生故障，分析各種可能的雨量站組合共 511 組，透過自行發展之數值模式僅需一個操作動作，便可完成超過上萬次的交集計算與圖形繪製，並將所有可能的徐昇加權因子組合計算完成存檔，在自動化分析上可節省相當人力。
3. 徐昇加權因子計算中，設定計算範圍邊界並不影響計算結果的分析，唯一受影響是計算邊界的閉合徐昇多邊形受到裁割而變小，但可有效解決無限空間的問題及無法閉合的徐昇多邊形，並可使輸出之圖形更加美觀及一致性。
4. 在本研究中盡量保持使用電子計算機有限的有效位數，可使電子計算機計算誤差盡量減到最小，在計算完成轉回實際的絕對座標時，誤差的位數可能被擠出有限的有效位數而被捨去，而使得本研究所發展之數值模式所造成計算誤差降至最低。
5. 本研究成果在計算速度及精確度上均較部分套裝軟體為優，可在分析階段時應用本研究成果取代套裝軟體的功能。
6. 本研究中採用幾何分析，交集分析完成後僅增加交點座標，可保持多邊形之原始數化精度，不因多次交集分析而造成多邊形失真。

6.2 建議

1. 未來可增加應用於高度平衡多邊形法、等雨量線法等相關平均降雨的推估方法上，提昇平均降雨的推估效率及精確度。

2. 未來可配合現有之地理資訊系統套裝軟體進行修改及移植，初步可採用外部模組分析，再依套裝軟體提供的巨集直譯器進行調整，俾使應用範圍更加提昇。
3. 在徐昇加權因子計算中，三角網可以不特別處理危險圓，但三角網若應用在等高線的計算，則應針對危險圓的部分再進行深入的研究。

灣，台中，第 I39 - I46 頁，民國 88 年 7 月。

6. 鄭子璉、周乃昉、胡文盛，「高度平衡多邊形法之數值計算」，1999 中華地理資訊學會學術研討會，臺灣，台中，第 2 頁，民國 88 年 12 月。

參考文獻

1. 王如意、易任，「應用水文學 新編上冊」，國立編譯館，臺灣，台北，第 83 - 84 頁，民國 80 年 1 月。
2. 周乃昉、蔡長泰、游保杉、鄭子璉，「曾文水庫洪水預報及防洪運轉資訊系統改善研究 (一)」，成大水利海洋研究發展文教基金會，民國 88 年 5 月。
3. 周乃昉、鄭子璉，「徐昇多邊形網的自動化計算」，八十四年電子計算機於土木水利工程應用論文研討會論文集，臺灣，中壢，第 465-476 頁，民國 84 年 10 月。
4. 管晏如，「測量學」，友寧出版有限公司，台南，第 193-194 頁，1979 年 6 月。
5. 鄭子璉、周乃昉，「多邊形交集分析在徐昇加權因子計算之探討」，第十屆水利工程研討會論文集，臺

註釋

為尊重智慧財產權，特將本文所提及之各項軟體、商標及所屬公司名稱列出，以示尊重。列出說明如下：

1. Visual BASIC 為 Microsoft 公司產品。
2. ArcView 、 Spatial Analyst 為 Environmental Systems Research Institute Inc. (ESRI) 公司產品。

本研究成果所發展之「徐昇網自動分析」模式可於網際網路上自由下載，網頁位置為：

<http://feitsui.hyd.ncku.edu.tw/TLCheng/Thiessen/>

謝誌

在本研究期間，承蒙曾文水庫管理中心洪燈河先生協助，以全球定位系統針對計算案例之雨量站進行座標位置校正，吳依芸小姐協助計算案例的座標數化及整理，並協助測試計算分析模式，謹致謝意。

表 1 以 Pentium II 300 計算案例的分析速度

項目 (單位)		曾文溪流域	曾文水庫集水區
雨量站數 (站)		37	9
流域多邊形端點數 (數)		203	688
計算時間 粗估(秒)	三角網	1	0.5
	徐昇多邊形網	2	0.5
	交集分析	12	8.0
	總計算時間	15	9.0

表 2 曾文水庫集水區雨量站位置座標修正表

站名	相差距離 (公尺)	文獻位置		修正位置	
		東經	北緯	東經	北緯
曾文新村	1,092	120-30-00	23-13-20	120-29-21	23-13-21
水山	779	120-48-45	23-28-28	120-49-15	23-28-17
樂野	1,481	120-43-00	23-28-17	120-43-30	23-27-48
里佳	1,163	120-43-23	23-23-07	120-42-43	23-23-17
表湖	392	120-39-09	23-15-43	120-39-23	23-15-43
馬頭山	564	120-35-23	23-20-19	120-35-43	23-20-17
龍美	2,477	120-38-00	23-24-00	120-39-15	23-24-42
三角南山	1,946	120-34-00	23-13-00	120-34-48	23-13-45
大棟山	2,544	120-30-00	23-18-00	120-31-22	23-18-35

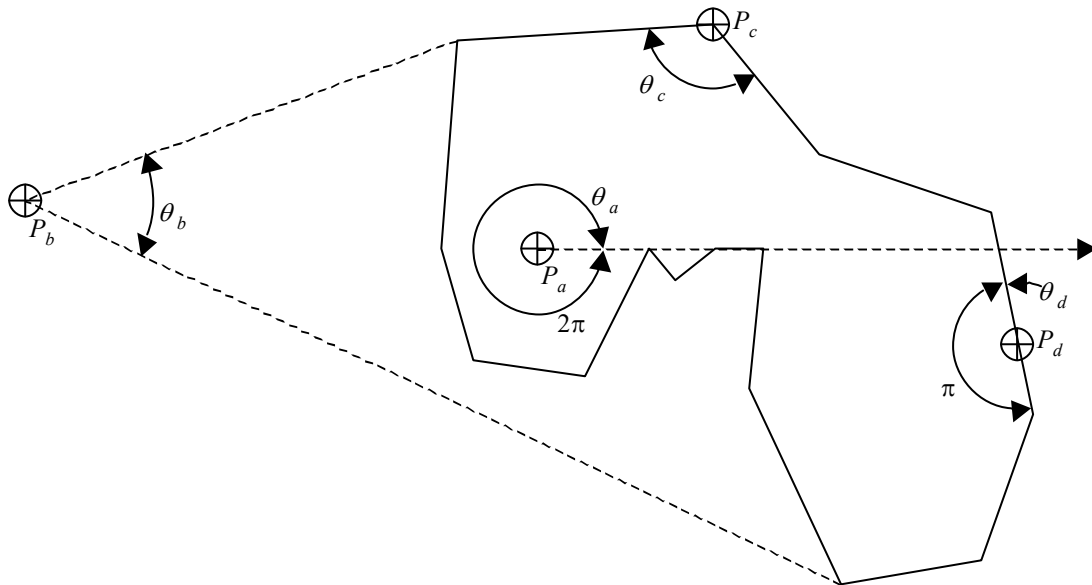


圖 1 任意點與多邊形的關係

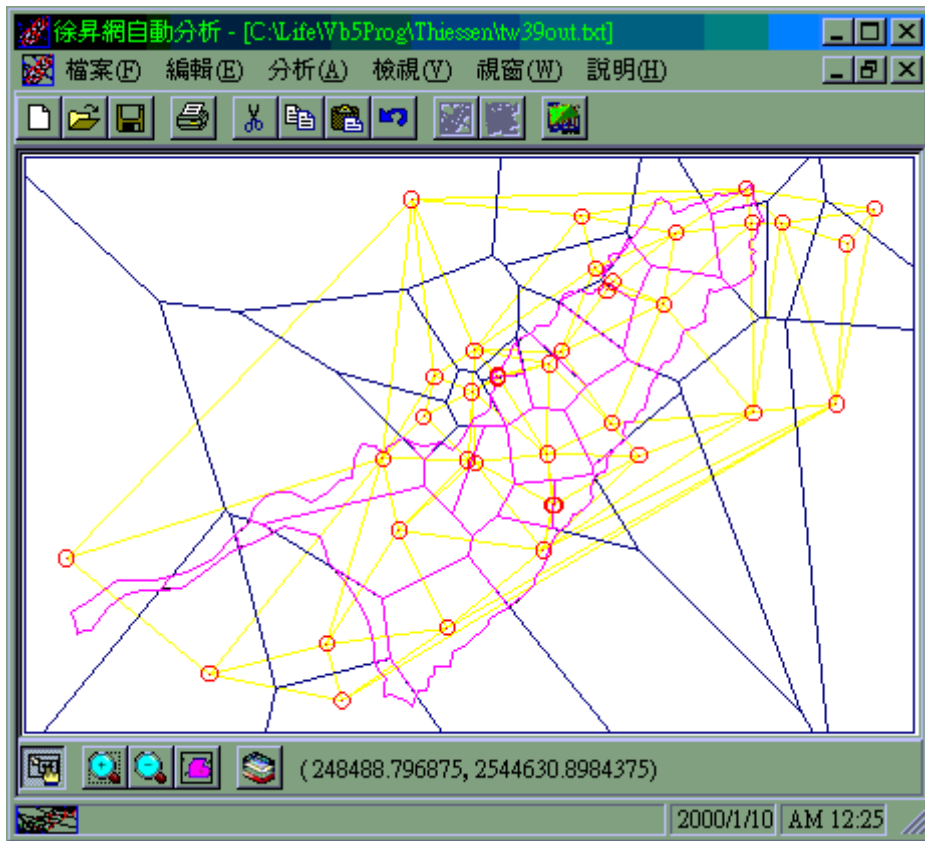


圖 2 數值模式計算曾文溪流域三角網、徐昇多邊形網分析完成圖

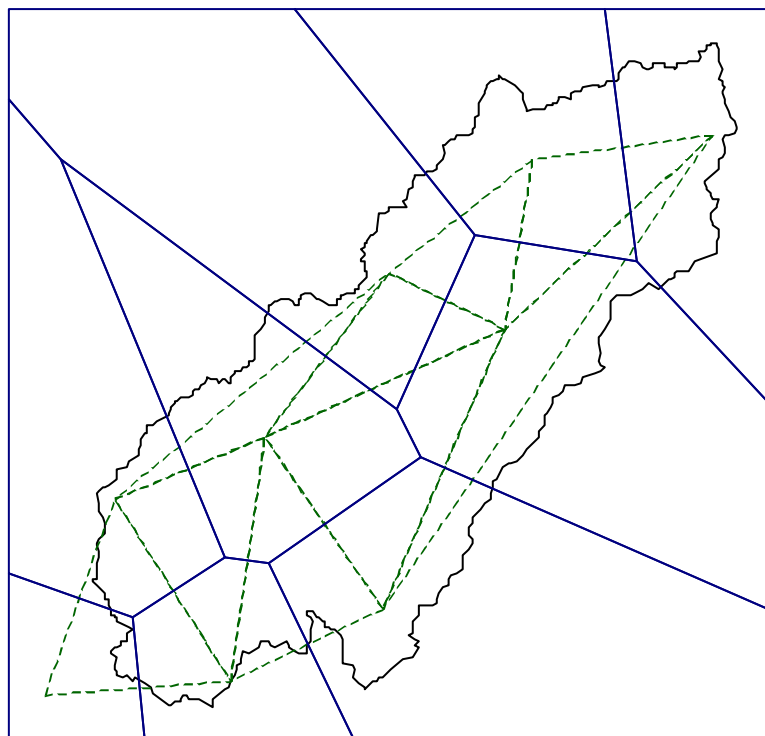


圖 3 曾文水庫集水區三角網、徐昇多邊形網分析成果

序號	站名	徐昇加權因子	徐昇網交集面積
25	天池	0	0
26	民族	1.99645688324068E-03	2334400.20752811
27	曾文w	4.76278798916368E-02	55689924.3036432
28	馬頭山w	0.034113376892909	39887800.6165743
29	大棟山w	5.86418199689013E-03	6856821.09412861
30	瀨頭	2.91563525986458E-02	34091693.2032919
31	曾文	1.90257339671799E-02	22246249.1898479
32	虎頭埤	2.29760176212626E-02	26865203.4278765
33	崎頂	1.04408509582619E-02	12208189.842885
34	南化	0.109448881941815	127975462.362085
35	西阿里關	5.66395770106072E-02	66227045.2408895
36	環湖	0.141270165340166	165183183.296354
37	關山	2.40488028411619E-02	28119580.6503391
38	其它	2.22044604925031E-16	2.59630436383936E-07
39	流域	1	1169271536.55273

圖 4 計算曾文溪流域徐昇加權因子分析結果展示



圖 5 ArcView 交集完成部分邊界放大展示圖